

# 1

## 认识一元二次方程

幼儿园某教室矩形地面的长为 8 m, 宽为 5 m, 现准备在地面正中间铺设一块面积为  $18 \text{ m}^2$  的地毯 (如图 2-1), 四周未铺地毯的条形区域的宽度都相同, 你能求出这个宽度吗?

如果设所求的宽度为  $x \text{ m}$ , 那么你能列出怎样的方程?

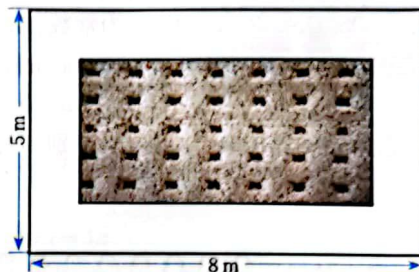


图 2-1

观察下面等式:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

你还能找到五个连续整数, 使前三个数的平方和等于后两个数的平方和吗?

如果将这五个连续整数中的第一个数设为  $x$ , 那么怎样用含  $x$  的代数式表示其余四个数? 根据题意, 你能列出怎样的方程?

如图 2-2, 一个长为 10 m 的梯子斜靠在墙上, 梯子的顶端距地面的垂直距离为 8 m. 如果梯子的顶端下滑 1 m, 那么梯子的底端滑动多少米?

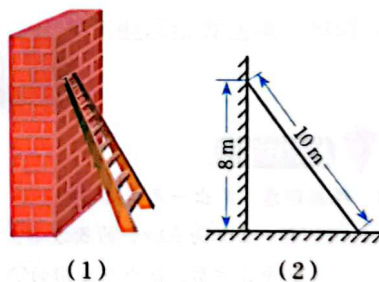


图 2-2

你能计算出滑动前梯子底端距墙的距离吗? 如果设梯子底端滑动  $x \text{ m}$ , 那么你能列出怎样的方程?



议一议

由上面三个问题, 我们可以得到三个方程:

$$(8 - 2x)(5 - 2x) = 18,$$

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2,$$

$$(x+6)^2 + 7^2 = 10^2.$$

这三个方程有什么共同特点?



上面的方程都是只含有一个未知数  $x$  的整式方程<sup>①</sup>, 并且都可以化成  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c$  为常数,  $a \neq 0$ ) 的形式, 这样的方程叫做一元二次方程 (quadratic equation with one unknown).

我们把  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c$  为常数,  $a \neq 0$ ) 称为一元二次方程的一般形式, 其中  $ax^2, bx, c$  分别称为二次项、一次项和常数项,  $a, b$  分别称为二次项系数和一次项系数.

### 随堂练习

- 根据题意列出一元二次方程: 已知直角三角形的三边长为连续整数, 求它的三边长.
- 把方程  $(3x+2)^2 = 4(x-3)^2$  化成一元二次方程的一般形式, 并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

## 习题 2.1



### 知识技能

- 根据题意, 列出一元二次方程:
  - 有一面积为  $54 \text{ m}^2$  的长方形, 将它的一边剪短  $5 \text{ m}$ , 另一边剪短  $2 \text{ m}$ , 恰好变成一个正方形, 这个正方形的边长是多少?
  - 三个连续整数两两相乘, 再求和, 结果为  $242$ , 这三个数分别是多少?
- 把下列方程化成一元二次方程的一般形式, 并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项:

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$3x^2 = 5x - 1$				
$(x+2)(x-1) = 6$				
$4 - 7x^2 = 0$				

<sup>①</sup> 等号两边都是关于未知数的整式的方程, 称为整式方程.



## 问题解决

3. 从前有一天, 一个笨汉拿着竹竿进屋, 横拿竖拿都进不去, 横着比门框宽 4 尺<sup>①</sup>, 竖着比门框高 2 尺. 他的邻居教他沿着门的两个对角斜着拿竿, 这个笨汉一试, 不多不少刚好进去了. 你知道竹竿有多长吗?  
请根据这一问题列出一元二次方程.



对于前一课第一个问题, 你能设法估计四周末铺地毯部分的宽度  $x$  (m) 吗?  
我们知道,  $x$  满足方程

$$(8-2x)(5-2x)=18.$$

- (1)  $x$  可能小于 0 吗? 可能大于 4 吗? 可能大于 2.5 吗? 说说你的理由.  
(2) 你能确定  $x$  的大致范围吗?  
(3) 填写下表:

$x$	0.5	1	1.5	2
$(8-2x)(5-2x)$				

- (4) 你知道所求宽度  $x$  (m) 是多少吗? 还有其他求解方法吗? 与同伴交流.



## 做一做

在前一课的问题中, 梯子底端滑动的距离  $x$  (m) 满足方程

$$(x+6)^2 + 7^2 = 10^2,$$

也就是

$$x^2 + 12x - 15 = 0.$$

- (1) 小明认为底端也滑动了 1 m, 他的说法正确吗? 为什么?  
(2) 底端滑动的距离可能是 2 m 吗? 可能是 3 m 吗? 为什么?  
(3) 你能猜出滑动距离  $x$  (m) 的大致范围吗?  
(4)  $x$  的整数部分是几? 十分位是几?

① “尺”是我国一种传统的长度单位, 3 尺 = 1 米.

## 4

## 探索三角形相似的条件

根据相似多边形的定义，三角分别相等、三边成比例的两个三角形叫做相似三角形 (similar triangles)。

那么，两个三角形至少满足哪些条件就相似呢？能否类比两个三角形全等的条件，寻找判定两个三角形相似的条件呢？



想一想

如果两个三角形只有一个角相等，它们一定相似吗？如果有两个角分别相等呢？



做一做

与同伴合作，两个人分别画  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$ ，使得  $\angle A$  和  $\angle A'$  都等于  $\angle \alpha$ ， $\angle B$  和  $\angle B'$  都等于  $\angle \beta$ ，此时， $\angle C$  与  $\angle C'$  相等吗？三边的比  $\frac{AB}{A'B'}$ ， $\frac{AC}{A'C'}$ ， $\frac{BC}{B'C'}$  相等吗？这样的两个三角形相似吗？

改变  $\angle \alpha$ ， $\angle \beta$  的大小，再试一试。



定理 两角分别相等的两个三角形相似。<sup>①</sup>

**例1** 如图4-13， $D$ ， $E$  分别是  $\triangle ABC$  的边  $AB$ ， $AC$  上的点， $DE \parallel BC$ ， $AB = 7$ ， $AD = 5$ ， $DE = 10$ ，求  $BC$  的长。

解：  $\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle B$ ， $\angle AED = \angle C$ 。

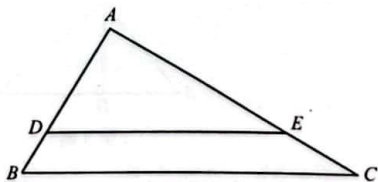


图 4-13

① 本节定理的证明见本章第5节。



$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$  (两角分别相等的两个三角形相似).

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}.$$

$$\therefore BC = \frac{AB \cdot DE}{AD} = \frac{7 \times 10}{5} = 14.$$

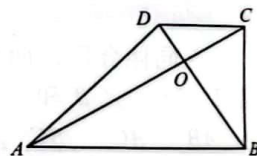
### 随堂练习

1. 有一个锐角相等的两个直角三角形是否相似? 为什么?
2. 顶角相等的两个等腰三角形是否相似? 为什么?

### 习题 4.5

#### 知识技能

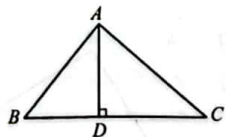
1. 在  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  中,  $\angle A = \angle D = 70^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle E = 50^\circ$ , 这两个三角形相似吗? 为什么?
2. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ , 对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ . 找出图中的相似三角形, 并说明理由.



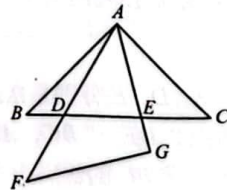
(第2题)

#### 数学理解

3. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$ , 垂足为  $D$ .  
(1) 请指出图中所有的相似三角形;  
(2) 你能得出  $AD^2 = BD \cdot DC$  吗?



(第3题)

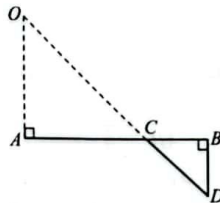


(第4题)

4. 将两个全等的等腰直角三角形摆成如图所示的样子 (图中的所有点、线都在同一平面内), 请在图中找出两对相似而不全等的三角形, 并说明它们相似的理由.

## 问题解决

5. 如图, 为了测量一个大峡谷的宽度, 位于峡谷一侧的地质勘探人员在对面的岩石上观察到一个特别明显的标志点  $O$ , 再在他们所在的这一侧选点  $A, B, D$ , 使得  $AB \perp AO$ ,  $DB \perp AB$ , 然后确定  $DO$  和  $AB$  的交点  $C$ . 测得  $AC = 120$  m,  $CB = 60$  m,  $BD = 50$  m, 你能帮助他们算出峡谷的宽  $AO$  吗?



(第5题)

两个三角形有两边成比例, 它们一定相似吗? 与同伴交流.

小明认为, 两边成比例的两个三角形不一定相似. 如果再增加一个条件, 你能说出有哪几种可能的情况吗?

我们先来考虑增加一角相等的情况.

相等的角可以是其中一边的对角, 也可以是两边的夹角.

## 做一做

画  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$ , 使  $\angle A = \angle A'$ ,  $\frac{AB}{A'B'}$  和  $\frac{AC}{A'C'}$  都等于给定的值  $k$ . 设法比较  $\angle B$  与  $\angle B'$  (或  $\angle C$  与  $\angle C'$ ) 的大小.  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$  相似吗? 改变  $k$  值的大小, 再试一试.



**定理** 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

**例2** 如图4-14,  $D, E$  分别是  $\triangle ABC$  的边  $AC, AB$  上的点,  $AE = 1.5$ ,  $AC = 2$ ,  $BC = 3$ , 且  $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$ , 求  $DE$  的长.

## 习题 5.3



## 知识技能

- (1) 画出图中各物体的主视图、左视图和俯视图；  
(2) 请找出一些类似形状的物体，并尝试画出它们的三种视图。

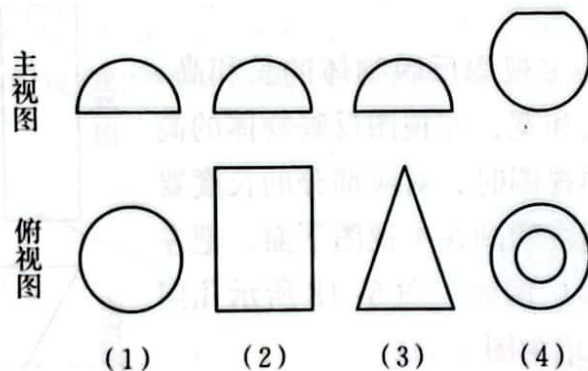


(第1题)



## 数学理解

- 根据下列主视图和俯视图，找出对应的物体。



(A)



(B)



(C)



(D)

图 5-18 是一个正三棱柱<sup>①</sup>。

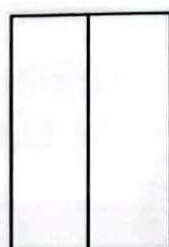
(1) 你能想象出这个正三棱柱的主视图、左视图和俯视图吗？你能画出它们吗？

(2) 小亮画出了这个正三棱柱的主视图、左视图和俯视图（如图 5-19），你同意他的画法吗？



图 5-18

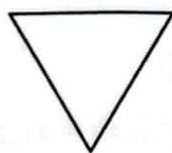
① 底面为正多边形的直棱柱称为正棱柱。



主视图



左视图



俯视图

图 5-19

(3) 你所画的主视图与俯视图中有哪些部分对应相等? 主视图与左视图中有哪些部分对应相等? 左视图与俯视图呢? 与同伴交流.

在三种视图中, 主视图反映物体的长和高, 俯视图反映物体的长和宽, 左视图反映物体的高和宽. 因此在画三种视图时, 对应部分的长度要相等, 而且通常把俯视图画在主视图下面, 把左视图画在主视图右面. 例如, 图 5-18 所示几何体的三种视图可以表示为图 5-20.

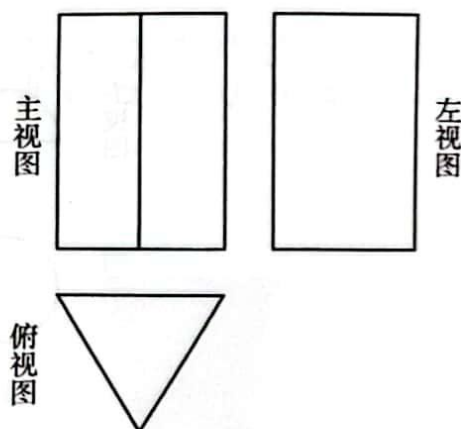


图 5-20

**例** 画出如图 5-21 所示的四棱柱的主视图、左视图和俯视图.

**解:** 在画视图时, 看得见部分的轮廓线要画成实线, 看不见部分的轮廓线要画成虚线. 这个四棱柱的三种视图如图 5-22 所示.



图 5-21

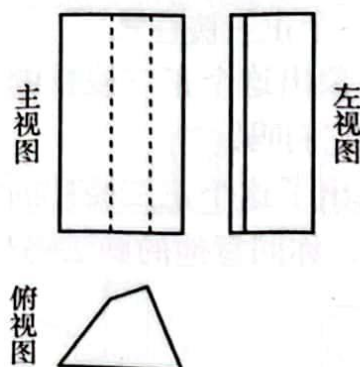


图 5-22



## 做一做

两个三棱柱的底面均为等腰直角三角形，它们的俯视图分别如图 5-23 所示，画出它们的主视图和左视图。

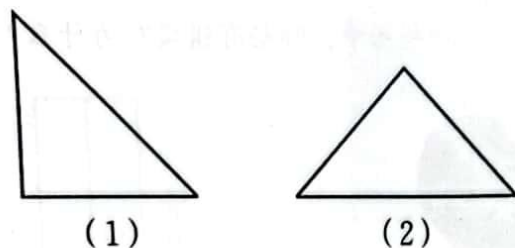
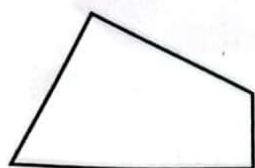


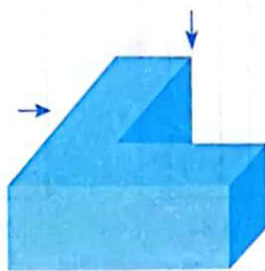
图 5-23

## 随堂练习

1. 已知某四棱柱的俯视图如图所示，画出它的主视图和左视图。



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。

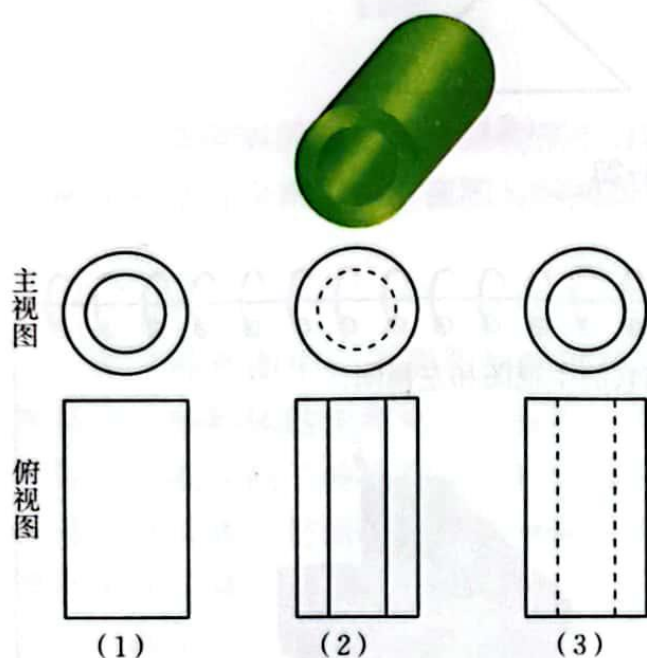


习题 5.4



知识技能

1. 在如图所示的空心圆柱的两种视图中, 哪些有错误? 为什么?



(第1题)



(1)



(2)

(第2题)

2. 画出如图所示几何体的三种视图.

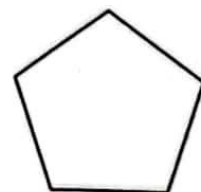


数学理解

3. 画出图中正六棱柱的主视图、左视图和俯视图.



(第3题)



(第4题)

4. 一个正五棱柱的俯视图如图所示, 请你画出它的主视图和左视图.