

2018年上海市高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1. (4 分) (2018•上海) 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为 18.

【考点】OM: 二阶行列式的定义.

【专题】11 : 计算题; 49 : 综合法; 5R : 矩阵和变换.

【分析】直接利用行列式的定义, 计算求解即可.

【解答】解: 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 5 - 2 \times 1 = 18$.

故答案为: 18.

【点评】本题考查行列式的定义, 运算法则的应用, 是基本知识的考查.

2. (4 分) (2018•上海) 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $\pm \frac{1}{2}x$.

【考点】KC: 双曲线的性质.

【专题】11 : 计算题.

【分析】先确定双曲线的焦点所在坐标轴, 再确定双曲线的实轴长和虚轴长, 最后确定双曲线的渐近线方程.

【解答】解: \because 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的 $a=2$, $b=1$, 焦点在 x 轴上

而双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$

\therefore 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$

故答案为: $y = \pm \frac{1}{2}x$

【点评】本题考察了双曲线的标准方程, 双曲线的几何意义, 特别是双曲线的渐近线方程, 解题时要注意先定位, 再定量的解题思想

3. (4 分) (2018•上海) 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为 21 (结

果用数值表示).

【考点】DA: 二项式定理.

【专题】38 : 对应思想; 4O: 定义法; 5P : 二项式定理.

【分析】利用二项式展开式的通项公式求得展开式中 x^2 的系数.

【解答】解: 二项式 $(1+x)^7$ 展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_7^r \cdot x^r,$$

令 $r=2$, 得展开式中 x^2 的系数为 $C_7^2=21$.

故答案为: 21.

【点评】本题考查了二项展开式的通项公式的应用问题, 是基础题.

4. (4分)(2018•上海) 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$. 若 $f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(3, 1)$, 则 $a = \underline{7}$.

【考点】4R: 反函数.

【专题】11 : 计算题; 33 : 函数思想; 4O: 定义法; 51 : 函数的性质及应用.

【分析】由反函数的性质得函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ 的图象经过点 $(1, 3)$, 由此能求出 a .

【解答】解: \because 常数 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$.

$f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(3, 1)$,

\therefore 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ 的图象经过点 $(1, 3)$,

$\therefore \log_2(1+a) = 3$,

解得 $a=7$.

故答案为: 7.

【点评】本题考查实数值的求法, 考查函数的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

5. (4分)(2018•上海) 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 1 - 7i$ (i 是虚数单位), 则 $|z| = \underline{5}$.

【考点】A8: 复数的模.

【专题】38 : 对应思想; 4A : 数学模型法; 5N : 数系的扩充和复数.

【分析】把已知等式变形，然后利用复数代数形式的乘除运算化简，再由复数求模公式计算得答案.

【解答】解：由 $(1+i)z=1-7i$ ，
得 $z=\frac{1-7i}{1+i}=\frac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-6-8i}{2}=-3-4i$ ，
则 $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$.

故答案为：5.

【点评】本题考查了复数代数形式的乘除运算，考查了复数模的求法，是基础题.

6. (4分) (2018·上海) 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_3=0$ ， $a_6+a_7=14$ ，
则 $S_7=$ 14 .

【考点】85：等差数列的前 n 项和.

【专题】11：计算题；34：方程思想；40：定义法；54：等差数列与等比数列.

【分析】利用等差数列通项公式列出方程组，求出 $a_1=-4$ ， $d=2$ ，由此能求出 S_7 .

【解答】解：∵等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_3=0$ ， $a_6+a_7=14$ ，

$$\therefore \begin{cases} a_1+2d=0 \\ a_1+5d+a_1+6d=14 \end{cases}$$

解得 $a_1=-4$ ， $d=2$ ，

$$\therefore S_7=7a_1+\frac{7 \times 6}{2}d=-28+42=14.$$

故答案为：14.

【点评】本题考查等差数列的前 n 项和的求法，考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

7. (5分) (2018·上海) 已知 $\alpha \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ ，若幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上递减，则 $\alpha=$ -1 .

【考点】4U：幂函数的概念、解析式、定义域、值域.

【专题】11：计算题；34：方程思想；40：定义法；51：函数的性质及应用.

【分析】由幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上递减，得到 α 是奇数，

且 $a < 0$ ，由此能求出 a 的值。

【解答】解： $\because \alpha \in \{-2, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ ，

幂函数 $f(x) = x^a$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上递减，

$\therefore a$ 是奇数，且 $a < 0$ ，

$\therefore a = -1$ 。

故答案为： -1 。

【点评】 本题考查实数值的求法，考查幂函数的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题。

8. (5分) (2018·上海) 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ，

E 、 F 是 y 轴上的两个动点，且 $|\overrightarrow{EF}| = 2$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为 -3 。

【考点】 90：平面向量数量积的性质及其运算。

【专题】 11：计算题；35：转化思想；41：向量法；5A：平面向量及应用。

【分析】 据题意可设 $E(0, a)$ ， $F(0, b)$ ，从而得出 $|a - b| = 2$ ，即 $a = b + 2$ ，或 $b = a + 2$ ，并可求得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -2 + ab$ ，将 $a = b + 2$ 代入上式即可求出 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值，同理将 $b = a + 2$ 代入，也可求出 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值。

【解答】解：根据题意，设 $E(0, a)$ ， $F(0, b)$ ；

$$\therefore |\overrightarrow{EF}| = |a - b| = 2;$$

$$\therefore a = b + 2, \text{ 或 } b = a + 2;$$

$$\text{且 } \overrightarrow{AE} = (1, a), \overrightarrow{BF} = (-2, b);$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -2 + ab;$$

$$\text{当 } a = b + 2 \text{ 时, } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -2 + (b + 2) \cdot b = b^2 + 2b - 2;$$

$$\because b^2 + 2b - 2 \text{ 的最小值为 } \frac{-8 - 4}{4} = -3;$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} \text{ 的最小值为 } -3, \text{ 同理求出 } b = a + 2 \text{ 时, } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} \text{ 的最小值为 } -3.$$

故答案为： -3 。

【点评】 考查根据点的坐标求两点间的距离，根据点的坐标求向量的坐标，以及

向量坐标的数量积运算，二次函数求最值的公式.

9. (5分)(2018•上海)有编号互不相同的五个砝码,其中5克、3克、1克砝码各一个,2克砝码两个,从中随机选取三个,则这三个砝码的总质量为9克的概率是 $\frac{1}{5}$ (结果用最简分数表示).

【考点】CB: 古典概型及其概率计算公式.

【专题】11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 51: 概率与统计.

【分析】求出所有事件的总数,求出三个砝码的总质量为9克的事件总数,然后求解概率即可.

【解答】解:编号互不相同的五个砝码,其中5克、3克、1克砝码各一个,2克砝码两个,

从中随机选取三个,3个数中含有1个2;2个2,没有2,3种情况,

所有的事件总数为: $C_5^3=10$,

这三个砝码的总质量为9克的事件只有:5,3,1或5,2,2两个,

所以:这三个砝码的总质量为9克的概率是: $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,

故答案为: $\frac{1}{5}$.

【点评】本题考查古典概型的概率的求法,是基本知识的考查.

10. (5分)(2018•上海)设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$),前n项

和为 S_n .若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$,则 $q=3$.

【考点】8J: 数列的极限.

【专题】11: 计算题; 34: 方程思想; 35: 转化思想; 49: 综合法; 55: 点列、递归数列与数学归纳法.

【分析】利用等比数列的通项公式求出首项,通过数列的极限,列出方程,求解公比即可.

【解答】解:等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$),可得 $a_1=1$,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - 1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$, 所以数列的公比不是 1,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad a_{n+1} = q^n.$$

$$\text{可得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^n}{(1-q)q^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{q^n} - 1}{1-q} = \frac{1}{q-1} = \frac{1}{2},$$

可得 $q=3$.

故答案为: 3.

【点评】 本题考查数列的极限的运算法则的应用, 等比数列求和以及等比数列的简单性质的应用, 是基本知识的考查.

11. (5分) (2018·上海) 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图象经过点 $P(p, \frac{6}{5})$,

$Q(q, \frac{1}{5})$. 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a = \underline{6}$.

【考点】 3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】 35: 转化思想; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 直接利用函数的关系式, 利用恒等变换求出相应的 a 值.

【解答】 解: 函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图象经过点 $P(p, \frac{6}{5})$, $Q(q, \frac{1}{5})$.

$$\text{则: } \frac{2^p}{2^p + ap} + \frac{2^q}{2^q + aq} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{5} = 1,$$

$$\text{整理得: } \frac{2^{p+q} + 2^p aq + 2^q ap + 2^{p+q}}{2^{p+q} + 2^p aq + 2^q ap + a^2 pq} = 1,$$

$$\text{解得: } 2^{p+q} = a^2 pq,$$

$$\text{由于: } 2^{p+q} = 36pq,$$

$$\text{所以: } a^2 = 36,$$

$$\text{由于 } a > 0,$$

$$\text{故: } a = 6.$$

故答案为：6

【点评】 本题考查的知识要点：函数的性质的应用，代数式的变换问题的应用.

12. (5分) (2018•上海) 已知实数 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 满足： $x_1^2+y_1^2=1$ ， $x_2^2+y_2^2=1$ ，

$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$ ，则 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

【考点】 7F：基本不等式及其应用；IT：点到直线的距离公式.

【专题】 35：转化思想；48：分析法；59：不等式的解法及应用.

【分析】 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $\vec{OA}=(x_1, y_1)$ ， $\vec{OB}=(x_2, y_2)$ ，由圆的方程和向量数量积的定义、坐标表示，可得三角形 OAB 为等边三角形， $AB=1$ ，

$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的几何意义为点 A ， B 两点到直线 $x+y-1=0$ 的距离 d_1

与 d_2 之和，由两平行线的距离可得所求最大值.

【解答】 解：设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$\vec{OA}=(x_1, y_1)$ ， $\vec{OB}=(x_2, y_2)$ ，

由 $x_1^2+y_1^2=1$ ， $x_2^2+y_2^2=1$ ， $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$ ，

可得 A ， B 两点在圆 $x^2+y^2=1$ 上，

且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \times 1 \times \cos \angle AOB = \frac{1}{2}$ ，

即有 $\angle AOB = 60^\circ$ ，

即三角形 OAB 为等边三角形，

$AB=1$ ，

$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的几何意义为点 A ， B 两点

到直线 $x+y-1=0$ 的距离 d_1 与 d_2 之和，

显然 A ， B 在第三象限， AB 所在直线与直线 $x+y=1$ 平行，

可设 $AB: x+y+t=0$ ，($t>0$)，

由圆心 O 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|t|}{\sqrt{2}}$ ，

可得 $2\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}=1$, 解得 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

即有两平行线的距离为 $\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$,

即 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$,

故答案为: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查向量数量积的坐标表示和定义, 以及圆的方程和运用, 考查点与圆的位置关系, 运用点到直线的距离公式是解题的关键, 属于难题.

二、选择题 (本大题共有 4 题, 满分 20 分, 每题 5 分) 每题有且只有一个正确选项. 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

13. (5 分) (2018·上海) 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的动点, 则 P 到该椭圆的两个

焦点的距离之和为 ()

A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{2}$

【考点】 K4: 椭圆的性质.

【专题】 11: 计算题; 49: 综合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 判断椭圆长轴 (焦点坐标) 所在的轴, 求出 a, 接利用椭圆的定义, 转化求解即可.

【解答】 解: 椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标在 x 轴, $a=\sqrt{5}$,

P 是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的动点, 由椭圆的定义可知: 则 P 到该椭圆的两个焦点的

距离之和为 $2a=2\sqrt{5}$.

故选: C.

【点评】 本题考查椭圆的简单性质的应用, 椭圆的定义的应用, 是基本知识的考查.

14. (5分)(2018•上海) 已知 $a \in \mathbb{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

【考点】29: 充分条件、必要条件、充要条件.

【专题】11 : 计算题; 34 : 方程思想; 40: 定义法; 5L : 简易逻辑.

【分析】“ $a > 1$ ” \Rightarrow “ $\frac{1}{a} < 1$ ”, “ $\frac{1}{a} < 1$ ” \Rightarrow “ $a > 1$ 或 $a < 0$ ”, 由此能求出结果.

【解答】解: $a \in \mathbb{R}$, 则“ $a > 1$ ” \Rightarrow “ $\frac{1}{a} < 1$ ”,

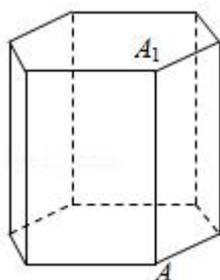
“ $\frac{1}{a} < 1$ ” \Rightarrow “ $a > 1$ 或 $a < 0$ ”,

\therefore “ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充分非必要条件.

故选: A.

【点评】本题考查充分条件、必要条件的判断, 考查不等式的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

15. (5分)(2018•上海) 《九章算术》中, 称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马, 设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱, 如图, 若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以 AA_1 为底面矩形的一边, 则这样的阳马的个数是 ()



- A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

【考点】D8: 排列、组合的实际应用.

【专题】11 : 计算题; 38 : 对应思想; 4R: 转化法; 5O : 排列组合.

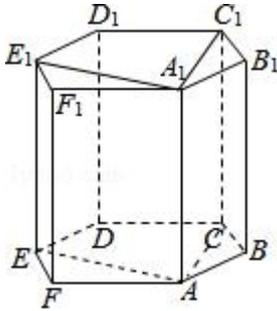
【分析】根据新定义和正六边形的性质可得答案.

【解答】解: 根据正六边形的性质, 则 $D_1 - A_1ABB_1$, $D_1 - A_1AFF_1$ 满足题意, 而 C_1 , E_1 , C , D , E , 和 D_1 一样, 有 $2 \times 6 = 12$, 当 A_1ACC_1 为底面矩形, 有 2 个满足题意,

当 A_1AEE_1 为底面矩形，有 2 个满足题意，

故有 $12+2+2=16$

故选：D.



【点评】 本题考查了新定义，以及排除组合的问题，考查了棱柱的特征，属于中档题.

16. (5分) (2018•上海) 设 D 是含数 1 的有限实数集， $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若 $f(x)$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图象重合，则在以下各项中，

$f(1)$ 的可能取值只能是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 0

【考点】 3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】 35 : 转化思想; 51 : 函数的性质及应用; 56 : 三角函数的求值.

【分析】 直接利用定义函数的应用求出结果.

【解答】 解：由题意得到：问题相当于圆上由 12 个点为一组，每次绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后与下一个点会重合.

我们可以通过代入和赋值的方法当 $f(1) = \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0$ 时，此时得到的圆心角为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 0$ ，然而此时 $x=0$ 或者 $x=1$ 时，都有 2 个 y 与之对应，而我们知道函数的定义就是要求一个 x 只能对应一个 y ，因此只有当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，此时旋转 $\frac{\pi}{6}$ ，此

时满足一个 x 只会对应一个 y ，因此答案就选：B.

故选：B.

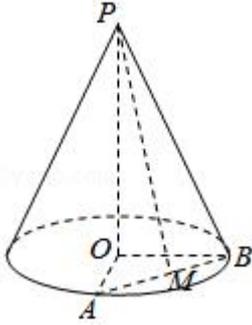
【点评】 本题考查的知识要点：定义性函数的应用.

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17. (14 分) (2018·上海) 已知圆锥的顶点为 P, 底面圆心为 O, 半径为 2.

(1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积;

(2) 设 PO=4, OA、OB 是底面半径, 且 $\angle AOB=90^\circ$, M 为线段 AB 的中点, 如图. 求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小.



【考点】 LM: 异面直线及其所成的角; L5: 旋转体 (圆柱、圆锥、圆台); LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】 11 : 计算题; 31 : 数形结合; 41 : 向量法; 5F : 空间位置关系与距离; 5G : 空间角.

【分析】 (1) 由圆锥的顶点为 P, 底面圆心为 O, 半径为 2, 圆锥的母线长为 4 能求出圆锥的体积.

(2) 以 O 为原点, OA 为 x 轴, OB 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法能求出异面直线 PM 与 OB 所成的角.

【解答】 解: (1) \because 圆锥的顶点为 P, 底面圆心为 O, 半径为 2, 圆锥的母线长为 4,

$$\begin{aligned} \therefore \text{圆锥的体积 } V &= \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times \sqrt{4^2 - 2^2} \\ &= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}. \end{aligned}$$

(2) \because PO=4, OA, OB 是底面半径, 且 $\angle AOB=90^\circ$, M 为线段 AB 的中点,

\therefore 以 O 为原点, OA 为 x 轴, OB 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

P (0, 0, 4), A (2, 0, 0), B (0, 2, 0),

$M(1, 1, 0), O(0, 0, 0),$

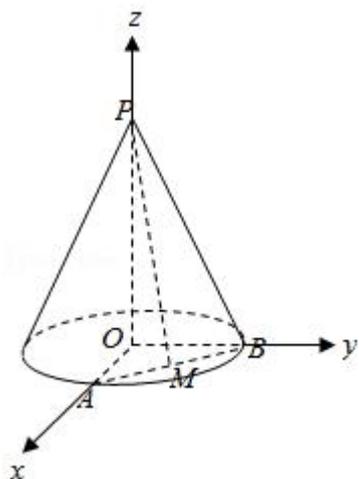
$\overrightarrow{PM} = (1, 1, -4), \overrightarrow{OB} = (0, 2, 0),$

设异面直线 PM 与 OB 所成的角为 $\theta,$

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{2}{\sqrt{18} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\therefore \theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

\therefore 异面直线 PM 与 OB 所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{2}}{6}.$



【点评】 本题考查圆锥的体积的求法，考查异面直线所成角的正切值的求法，考查空间中直线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题。

18. (14分) (2018·上海) 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x.$

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值；

(2) 若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解.

【考点】 GP: 两角和与差的三角函数; GS: 二倍角的三角函数.

【专题】 11: 计算题; 38: 对应思想; 4R: 转化法; 58: 解三角形.

【分析】 (1) 根据函数的奇偶性和三角形的函数的性质即可求出,

(2) 先求出 a 的值, 再根据三角形函数的性质即可求出.

【解答】 解: (1) $\because f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x,$

$$\therefore f(-x) = -a \sin 2x + 2 \cos^2 x,$$

∵ $f(x)$ 为偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore -\sin 2x + 2\cos^2 x = \sin 2x + 2\cos^2 x,$$

$$\therefore 2\sin 2x = 0,$$

$$\therefore a = 0;$$

$$(2) \therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{2} + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = a + 1 = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1,$$

$$\therefore f(x) = 1 - \sqrt{2},$$

$$\therefore 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 1 - \sqrt{2},$$

$$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ 或 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi, \text{ 或 } x = \frac{13\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore x \in [-\pi, \pi],$$

$$\therefore x = \frac{13\pi}{24} \text{ 或 } x = \frac{19\pi}{24} \text{ 或 } x = -\frac{5\pi}{24} \text{ 或 } x = -\frac{11\pi}{24}$$

【点评】 本题考查了三角函数的化简和求值, 以及三角函数的性质, 属于基础题.

19. (14分) (2018·上海) 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30 \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases} \quad (\text{单位: 分钟}),$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为 40 分钟, 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式；讨论 $g(x)$ 的单调性，并说明其实际意义.

【考点】 5B: 分段函数的应用.

【专题】 12 : 应用题; 33 : 函数思想; 4C : 分类法; 51 : 函数的性质及应用.

【分析】 (1) 由题意知求出 $f(x) > 40$ 时 x 的取值范围即可;

(2) 分段求出 $g(x)$ 的解析式, 判断 $g(x)$ 的单调性, 再说明其实际意义.

【解答】 解: (1) 由题意知, 当 $30 < x < 100$ 时,

$$f(x) = 2x + \frac{1800}{x} - 90 > 40,$$

$$\text{即 } x^2 - 65x + 900 > 0,$$

解得 $x < 20$ 或 $x > 45$,

$\therefore x \in (45, 100)$ 时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间;

(2) 当 $0 < x \leq 30$ 时,

$$g(x) = 30 \cdot x\% + 40(1 - x\%) = 40 - \frac{x}{10};$$

当 $30 < x < 100$ 时,

$$g(x) = \left(2x + \frac{180}{x} - 90\right) \cdot x\% + 40(1 - x\%) = \frac{x^2}{50} - \frac{13}{10}x + 58;$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} 40 - \frac{x}{10} \\ \frac{x^2}{50} - \frac{13}{10}x + 58 \end{cases};$$

当 $0 < x < 32.5$ 时, $g(x)$ 单调递减;

当 $32.5 < x < 100$ 时, $g(x)$ 单调递增;

说明该地上班族 S 中有小于 32.5% 的人自驾时, 人均通勤时间是递减的;

有大于 32.5% 的人自驾时, 人均通勤时间是递增的;

当自驾人数为 32.5% 时, 人均通勤时间最少.

【点评】 本题考查了分段函数的应用问题, 也考查了分类讨论与分析问题、解决问题的能力.

20. (16分) (2018·上海) 设常数 $t > 2$. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F(2, 0)$, 直线 $l: x=t$, 曲线 $\Gamma: y^2=8x$ ($0 \leq x \leq t, y \geq 0$). l 与 x 轴交于点 A , 与 Γ 交于

点 B. P、Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点.

(1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;

(2) 设 $t=3$, $|FQ|=2$, 线段 OQ 的中点在直线 FP 上, 求 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 $t=8$, 是否存在以 FP、FQ 为邻边的矩形 FPEQ, 使得点 E 在 Γ 上? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

【考点】KN: 直线与抛物线的位置关系.

【专题】35 : 转化思想; 4R: 转化法; 5D : 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】(1) 方法一: 设 B 点坐标, 根据两点之间的距离公式, 即可求得 $|BF|$;
方法二: 根据抛物线的定义, 即可求得 $|BF|$;

(2) 根据抛物线的性质, 求得 Q 点坐标, 即可求得 OD 的中点坐标, 即可求得直线 PF 的方程, 代入抛物线方程, 即可求得 P 点坐标, 即可求得 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 P 及 E 点坐标, 根据直线 $k_{PF} \cdot k_{FQ} = -1$, 求得直线 QF 的方程, 求得 Q 点坐标, 根据 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{FE}$, 求得 E 点坐标, 则 $(\frac{48+y^2}{4y})^2 = 8(\frac{y^2}{8} + 6)$, 即可求得 P

点坐标.

【解答】解: (1) 方法一: 由题意可知: 设 B $(t, 2\sqrt{2t})$,

则 $|BF| = \sqrt{(t-2)^2 + 8t} = t+2$,

$\therefore |BF| = t+2$;

方法二: 由题意可知: 设 B $(t, 2\sqrt{2t})$,

由抛物线的性质可知: $|BF| = t + \frac{p}{2} = t+2$, $\therefore |BF| = t+2$;

(2) F $(2, 0)$, $|FQ|=2$, $t=3$, 则 $|FA|=1$,

$\therefore |AQ| = \sqrt{3}$, $\therefore Q(3, \sqrt{2})$, 设 OQ 的中点 D,

$D(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,

$k_{QF} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{3}{2} - 2} = -\sqrt{3}$, 则直线 PF 方程: $y = -\sqrt{3}(x-2)$,

联立 $\begin{cases} y = -\sqrt{3}(x-2) \\ y^2 = 8x \end{cases}$, 整理得: $3x^2 - 20x + 12 = 0$,

解得： $x = \frac{2}{3}$, $x = 6$ (舍去),

$$\therefore \triangle AQP \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{7}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{6};$$

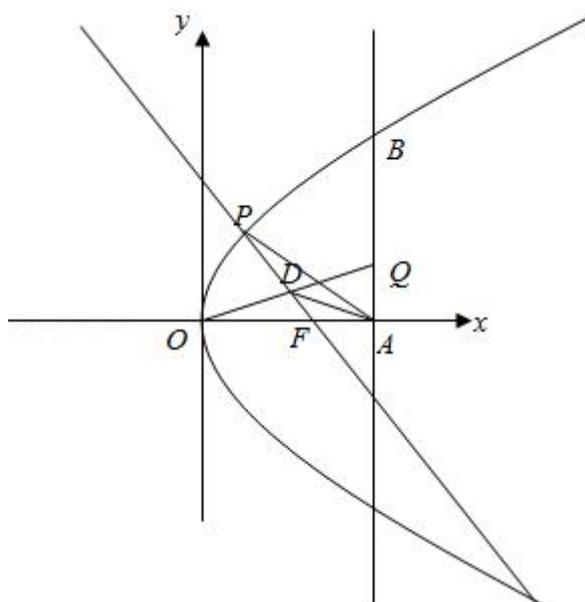
(3) 存在, 设 $P\left(\frac{y^2}{8}, y\right)$, $E\left(\frac{m^2}{8}, m\right)$, 则 $k_{PF} = \frac{y}{\frac{y^2}{8} - 2} = \frac{8y}{y^2 - 16}$, $k_{FQ} = \frac{16 - y^2}{8y}$,

直线 QF 方程为 $y = \frac{16 - y^2}{8y}(x - 2)$, $\therefore y_Q = \frac{16 - y^2}{8y}(8 - 2) = \frac{48 - 3y^2}{4y}$, $Q\left(8, \frac{48 - 3y^2}{4y}\right)$,

根据 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{FE}$, 则 $E\left(\frac{y^2}{8} + 6, \frac{48 + y^2}{4y}\right)$,

$$\therefore \left(\frac{48 + y^2}{4y}\right)^2 = 8\left(\frac{y^2}{8} + 6\right), \text{ 解得: } y^2 = \frac{16}{5},$$

\therefore 存在以 FP、FQ 为邻边的矩形 FPEQ, 使得点 E 在 Γ 上, 且 $P\left(\frac{2}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.



【点评】 本题考查抛物线的性质, 直线与抛物线的位置关系, 考查转化思想, 计算能力, 属于中档题.

21. (18分) (2018·上海) 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $|b_n - a_n| \leq 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”.

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n = a_{n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$

是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M=\{x|x=b_i, i=1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m ;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.

【考点】 8M: 等差数列与等比数列的综合.

【专题】 34 : 方程思想; 48 : 分析法; 54 : 等差数列与等比数列.

【分析】 (1) 运用等比数列的通项公式和新定义“接近”, 即可判断;

(2) 由新定义可得 $a_n - 1 \leq b_n \leq a_n + 1$, 求得 $b_i, i=1, 2, 3, 4$ 的范围, 即可得到所求个数;

(3) 运用等差数列的通项公式可得 a_n , 讨论公差 $d > 0, d=0, -2 < d < 0, d \leq -2$, 结合新定义“接近”, 推理和运算, 即可得到所求范围.

【解答】 解: (1) 数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近.

理由: $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

可得 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, b_n = a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2^n} + 1$,

则 $|b_n - a_n| = \left| \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right| = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1, n \in \mathbb{N}^*$,

可得数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近;

(2) $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列,

可得 $a_n - 1 \leq b_n \leq a_n + 1$,

数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=8$,

可得 $b_1 \in [0, 2], b_2 \in [1, 3], b_3 \in [3, 5], b_4 \in [7, 9]$,

可能 b_1 与 b_2 相等, b_2 与 b_3 相等, 但 b_1 与 b_3 不相等, b_4 与 b_3 不相等,

集合 $M = \{x|x=b_i, i=1, 2, 3, 4\}$,

M 中元素的个数 $m=3$ 或 4 ;

(3) $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近,

可得 $a_n = a_1 + (n-1)d$,

①若 $d > 0$, 取 $b_n = a_n$, 可得 $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n = d > 0$,

则 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中有 200 个正数, 符合题意;

②若 $d=0$, 取 $b_n=a_1 - \frac{1}{n}$, 则 $|b_n - a_n| = |a_1 - \frac{1}{n} - a_1| = \frac{1}{n} < 1, n \in \mathbb{N}^*$,

可得 $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$,

则 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中有 200 个正数, 符合题意;

③若 $-2 < d < 0$, 可令 $b_{2n-1} = a_{2n-1} - 1, b_{2n} = a_{2n} + 1$,

则 $b_{2n} - b_{2n-1} = a_{2n} + 1 - (a_{2n-1} - 1) = 2 + d > 0$,

则 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中恰有 100 个正数, 符合题意;

④若 $d \leq -2$, 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近,

即为 $a_n - 1 \leq b_n \leq a_n + 1, a_{n+1} - 1 \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} + 1$,

可得 $b_{n+1} - b_n \leq a_{n+1} + 1 - (a_n - 1) = 2 + d \leq 0$,

$b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中无正数, 不符合题意.

综上所述, d 的范围是 $(-2, +\infty)$.

【点评】 本题考查新定义“接近”的理解和运用, 考查等差数列和等比数列的定义和通项公式的运用, 考查分类讨论思想方法, 以及运算能力和推理能力, 属于难题.



遵义考试网
www.zyksw.cn