2018 年全国普通高等学校招生全国统一考试

（全国一卷）理科数学

一、选择题：(本题有 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。)

1、设 z= $\frac{1-i}{1+i}+2i$，则 | z | = (　　)

A.0　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C.1　　　　D. $\sqrt{2}$

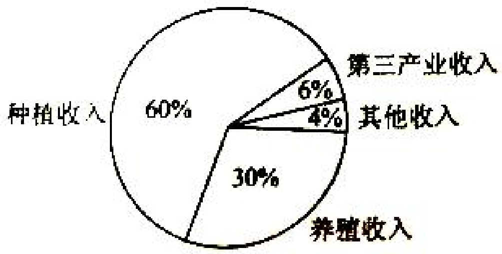
2、已知集合 A={x|x^2-x-2>0}，则 $C_R A$ = (　　)

A、{x|-1<x<2}　　　　B、{x|-1≤x≤2}

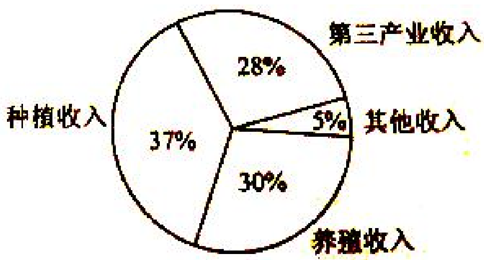
C、{x|x<-1}∪{x|x>2}　　　　D、{x|x≤-1}∪{x|x ≥2}

遵义考试网
www.zyksw.cn

3、某地区经过一年的新农村建设，农村的经济收入增加了一倍，实现翻番，为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况，统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例，得到如下饼图：



建设前经济收入构成比例



建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是 (　　)

A. 新农村建设后，种植收入减少

B. 新农村建设后，其他收入增加了一倍以上

C. 新农村建设后，养殖收入增加了一倍

D. 新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4、记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $3S_3 = S_2 + S_4$，$a_1 = 2$，则 $a_5 =$ (　　)

A、-12　　B、-10　　C、10　　D、12

5、设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$.若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 (　　)

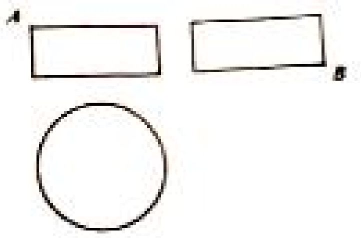
A. $y = -2x$　　B. $y = -x$　　C. $y = 2x$　　D. $y = x$

6、在 ΔABC 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB} =$ (　　)

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7、某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如右图。圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为 (　　)

遵义考试网 www.zy



A. $2\sqrt{17}$

B. $2\sqrt{5}$

C. 3

D. 2

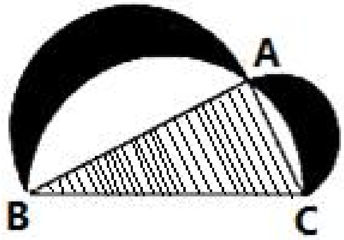
8.设抛物线 C：$y^2 = 4x$ 的焦点为 F，过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M，N 两点，则 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} =$ (　　)

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

9.已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$，若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围是(　　)

A. $[-1, 0)$　　B. $[0, +\infty)$　　C. $[-1, +\infty)$　　D. $[1, +\infty)$

10.下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形。此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB，AC. △ABC 的三边所围成的区域记为Ⅰ，黑色部分记为Ⅱ，其余部分记为Ⅲ。在整个图形中随机取一点，此点取自Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的概率分别记为 p_1，p_2，p_3，则(　　)



A. $p_1=p_2$

B. $p_1=p_3$

C. $p_2=p_3$

D. $p_1=p_2+p_3$

11.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，O 为坐标原点，F 为 C 的右焦点，过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M，N. 若△OMN 为直角三角形，则 $|MN|$ =(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B.3　　C. $2\sqrt{3}$　　D.4

12.已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面α 所成的角都相等，则α 截此正方体所得截面面积的最大值为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

遵义考试网
www.zyksw.cn

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2\le 0 \\ x-y+1\ge 0 \\ y\le 0 \end{cases}$ 则 z=3x+2y 的最大值为____________.

14.记 S_n 为数列 { a_n } 的前 n 项和. 若 $S_n = 2a_n+1$，则 S_6=____________.

15.从 2 位女生，4 位男生中选 3 人参加科技比赛，且至少有 1 位女生入选，则不同的选法共有_______________种.（用数字填写答案）

16.已知函数 f（x）=2sinx+sin2x，则 f（x）的最小值是______________.

三.解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

在平面四边形ABCD中，$\angle ADC=90°$，$\angle A=45°$，$AB=2$，$BD=5$.

（1）求$\cos\angle ADB$；

（2）若$DC=2\sqrt{2}$，求BC.

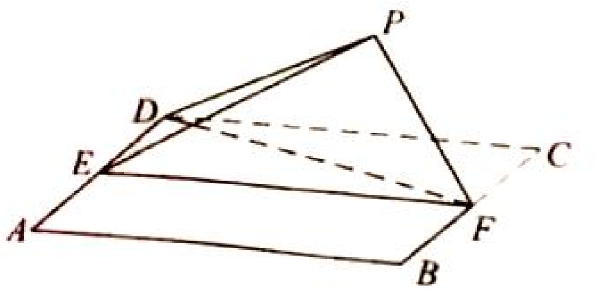
遵义考试网
www.zyksw.cn

18.（12分）

如图，四边形$ABCD$为正方形，E，F分别为AD，BC的中点，以DF为折痕把ΔDFC折起，使点C到达点P的位置，且$PF\perp BF$.

（1）证明：平面$PEF\perp$平面$ABFD$；

（2）求DP与平面$ABFD$所成角的正弦值.



19.（12分）

设椭圆C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过F的直线l与C交于A，B两点，点M的坐标为（2，0）.

（1）当l与x轴垂直时，求直线AM的方程；

（2）设O为坐标原点，证明：∠OMA =∠OMB.

遵义考试网
www.zyksw.cn

20、（12分）

某工厂的某种产品成箱包装，每箱200件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品，检验时，先从这箱产品中任取20件产品作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品做检验，设每件产品为不合格品的概率都为P（$0<P<1$），且各件产品是否为不合格品相互独立。

（1）记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(P)$，求 $f(P)$ 的最大值点 p_0 。

（2）现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以（1）中确定的 p_0 作为 P 的值，已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用。

（i）若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X，求 EX；

（ii）以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

遵义考试网
www.zyksw.cn

21、（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

（1）讨论 f（x）的单调性；

（2）若 f（x）存在两个极值点 x_1, x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1的方程为 $y=k|x|+2$.以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2的极坐标方程为$\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.

（1） 求 C_2的直角坐标方程:

（2） 若 C_1与 C_2有且仅有三个公共点，求 C_1的方程.

遵义考试网
www.zyksw.cn

23. [选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$.

（1） 当 a=1 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2） 若 $x\in(0，1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立，求 a 的取值范围.

遵义考试网
www.zyksw.cn

遵义考试网
www.zyksw.cn

绝密★启用前

2018 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案

一、选择题

1．C　　2．B　　3．A　　4．B　　5．D　　6．A

7．B　　8．D　　9．C　　10．A　　11．B　　12．A

二、填空题

13．6　　14．-63　　15．16　　16．$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

三、解答题

17．解：

（1）在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin\angle A}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$.

由题设知，$\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2}{\sin\angle ADB}$，所以$\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

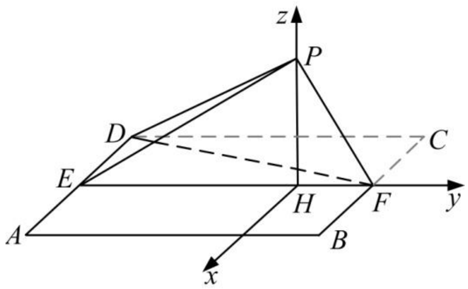
由题设知，$\angle ADB<90^\circ$，所以$\cos\angle ADB=\sqrt{1-\dfrac{2}{25}}=\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

（2）由题设及（1）知，$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得

$$\begin{aligned}BC^2&=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC\\&=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}\\&=25.\end{aligned}$$

所以$BC=5$.



18．解：

（1）由已知可得，$BF\perp PF$，$BF\perp EF$，所以$BF\perp$平面PEF.

又$BF\subset$平面$ABFD$，所以平面$PEF\perp$平面$ABFD$.

（2）作$PH\perp EF$，垂足为H．由（1）得，$PH\perp$平面$ABFD$.

以H为坐标原点，$\overrightarrow{HF}$的方向为y轴正方向，$|\overrightarrow{BF}|$为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系$H-xyz$.

由（1）可得，$DE\perp PE$．又$DP=2$，$DE=1$，所以$PE=\sqrt{3}$．又$PF=1$，$EF=2$，故$PE\perp PF$.

可得$PH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$EH=\dfrac{3}{2}$.

则$H(0,0,0)$，$P(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$D(-1,-\dfrac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{DP}=(1,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{HP}=(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$为平面$ABFD$的法向量.

设DP与平面$ABFD$所成角为θ，则 $\sin\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{HP}||\overrightarrow{DP}|}\right|=\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以DP与平面$ABFD$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

遵义考试网
www.zyksw.cn

19．解：

（1）由已知得$F(1,0)$，l的方程为$x=1$.

由已知可得，点 A 的坐标为 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 AM 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$ 或 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$.

（2）当 l 与 x 轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0°$.

当 l 与 x 轴垂直时，OM 为 AB 的垂直平分线，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，设 l 的方程为 $y=k(x-1)\ (k\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1<\sqrt{2}$，$x_2<\sqrt{2}$，直线 MA，MB 的斜率之和为 $k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}$.

由 $y_1=kx_1-k$，$y_2=kx_2-k$ 得

$$k_{MA}+k_{MB}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}.$$

将 $y=k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得

$$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0.$$

所以，$x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},\ x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

则 $2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k=\frac{4k^3-4k-12k^3+8k^3+4k}{2k^2+1}=0$.

从而 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故 MA，MB 的倾斜角互补. 所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

综上，$\angle OMA=\angle OMB$.

20．解：

（1）20件产品中恰有2件不合格品的概率为 $f(p)=C_{20}^2p^2(1-p)^{18}$. 因此

$$f'(p)=C_{20}^2[2p(1-p)^{18}-18p^2(1-p)^{17}]=2C_{20}^2p(1-p)^{17}(1-10p).$$

令 $f'(p)=0$，得 $p=0.1$. 当 $p\in(0,0.1)$ 时，$f'(p)>0$；当 $p\in(0.1,1)$ 时，$f'(p)<0$. 所以 $f(p)$ 的最大值点为 $p_0=0.1$.

（2）由（1）知，$p=0.1$.

（ⅰ）令 Y 表示余下的180件产品中的不合格品件数，依题意知 $Y\sim B(180,0.1)$，$X=20\times 2+25Y$，即 $X=40+25Y$.

所以 $EX=E(40+25Y)=40+25EY=490$.

（ⅱ）如果对余下的产品作检验，则这一箱产品所需要的检验费为400元.

由于 $EX>400$，故应该对余下的产品作检验.

21．解：

（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

（ⅰ）若$a\leqslant 2$，则$f'(x)\leqslant 0$，当且仅当$a=2$，$x=1$时$f'(x)=0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

（ⅱ）若$a>2$，令$f'(x)=0$得，$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当$x\in(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})\cup(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$时，$f'(x)<0$；

当$x\in(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$时，$f'(x)>0$. 所以$f(x)$在$(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$，$(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$单调递减，在$(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$单调递增.

（2）由（1）知，$f(x)$存在两个极值点当且仅当$a>2$.

由于$f(x)$的两个极值点x_1，x_2满足$x^2-ax+1=0$，所以$x_1x_2=1$，不妨设$x_1<x_2$，则$x_2>1$. 由于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}，$$

所以$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$等价于$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数$g(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$，由（1）知，$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，又$g(1)=0$，从而当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$.

所以$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

22．解：

（1）由$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$得C_2的直角坐标方程为

$$(x+1)^2+y^2=4.$$

（2）由（1）知C_2是圆心为$A(-1,0)$，半径为2的圆.

由题设知，C_1是过点$B(0,2)$且关于y轴对称的两条射线. 记y轴右边的射线为l_1，y轴左边的射线为l_2. 由于B在圆C_2的外面，故C_1与C_2有且仅有三个公共点等价于l_1与C_2只有一个公共点且l_2与C_2有两个公共点，或l_2与C_2只有一个公共点且l_1与C_2有两个公共点.

当l_1与C_2只有一个公共点时，A到l_1所在直线的距离为2，所以$\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故$k=-\frac{4}{3}$或$k=0$. 经检验，当$k=0$时，$l_1$与$C_2$没有公共点；当$k=-\frac{4}{3}$时，$l_1$与$C_2$只有一个公共点，$l_2$与$C_2$有两个公共点.

当l_2与C_2只有一个公共点时，A到l_2所在直线的距离为2，所以$\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故$k=0$或$k=\frac{4}{3}$. 经检验，当$k=0$

时，l_1 与 C_2 没有公共点；当 $k=\frac{4}{3}$ 时，l_2 与 C_2 没有公共点.

综上，所求 C_1 的方程为 $y=-\frac{4}{3}|x|+2$.

23．解：

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=|x+1|-|x-1|$ ，即 $f(x)=\begin{cases}-2, & x\leqslant -1,\\ 2x, & -1<x<1,\\ 2, & x\geqslant 1.\end{cases}$

故不等式 $f(x)>1$ 的解集为 $\{x\,|\,x>\frac{1}{2}\}$.

（2）当 $x\in(0,1)$ 时 $|x+1|-|ax-1|>x$ 成立等价于当 $x\in(0,1)$ 时 $|ax-1|<1$ 成立.

若 $a\leqslant 0$ ，则当 $x\in(0,1)$ 时 $|ax-1|\geqslant 1$ ；

若 $a>0$ ，$|ax-1|<1$ 的解集为 $0<x<\frac{2}{a}$ ，所以 $\frac{2}{a}\geqslant 1$ ，故 $0<a\leqslant 2$.

综上，a 的取值范围为 $(0,2]$.

遵义考试网
www.zyksw.cn