绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．作答时，将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\frac{1+2i}{1-2i}=$

A. $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$　　B. $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$　　C. $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　　D. $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

【答案】D

【解析】分析：根据复数除法法则化简复数，即得结果.

详解：$\because \frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{5}=\frac{-3+4i}{5}\therefore$ 选 D.

点睛：本题考查复数除法法则，考查学生基本运算能力.

2. 已知集合$A=\{(x，y)|x^2+y^2\le 3，x\in Z，y\in Z\}$，则A中元素的个数为

A. 9　　B. 8　　C. 5　　D. 4

【答案】A

【解析】分析：根据枚举法，确定圆及其内部整点个数.

详解：$\because x^2+y^2\le 3, \therefore x^2\le 3, \because x\in Z, \therefore x=-1,0,1$，

当$x=-1$时，$y=-1,0,1$；

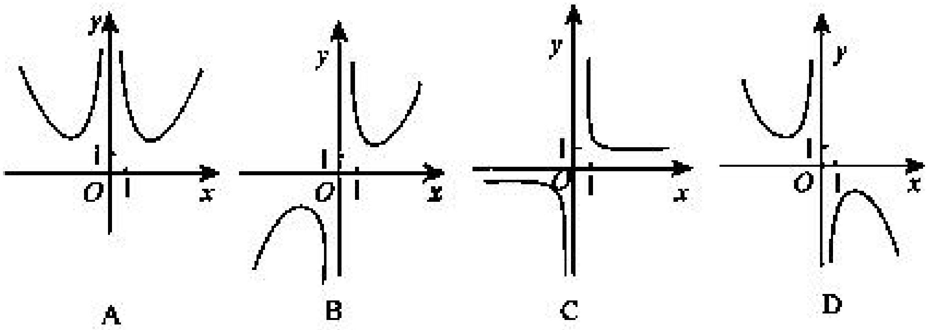
当$x=0$时，$y=-1,0,1$；

当$x=-1$时，$y=-1,0,1$；

所以共有 9 个，选 A.

点睛：本题考查集合与元素关系，点与圆位置关系，考查学生对概念理解与识别.

3. 函数$f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x^{2}}$的图像大致为



A. A　　B. B　　C. C　　D. D

【答案】B

【解析】分析：通过研究函数奇偶性以及单调性，确定函数图像.

详解：$\because x\neq 0,f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{x^{2}}=-f(x)\therefore f(x)$为奇函数，舍去 A,

$\because f(1)=e-e^{-1}>0\therefore$舍去 D;

$\because f'(x)=\dfrac{(e^{x}+e^{-x})x^{2}-(e^{x}-e^{-x})2x}{x^{4}}=\dfrac{(x-2)e^{x}+(x+2)e^{-x}}{x^{3}}\therefore x>2,f'(x)>0,$

所以舍去 C；因此选 B.

点睛：有关函数图象识别问题的常见题型及解题思路（1）由函数的定义域，判断图象左右的位置，由函数的值域，判断图象的上下位置；②由函数的单调性，判断图象的变化趋势；③由函数的奇偶性，判断图象的对称性；④由函数的周期性，判断图象的循环往复.

4. 已知向量，b满足$|a|=1$，$a\cdot b=-1$，则$a\cdot(2a-b)=$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 0

【答案】B

【解析】分析：根据向量模的性质以及向量乘法得结果.

详解：因为$\vec{a}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}^{2}-\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}|^{2}-(-1)=2+1=3,$

所以选 B.

点睛：向量加减乘：　$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2),\vec{a}^{2}=|\vec{a}|^{2},\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$

5. 双曲线$\dfrac{x^{2}}{a^{2}}-\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1\,(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

【答案】A

【解析】分析：根据离心率得 a, c 关系，进而得 a, b 关系，再根据双曲线方程求渐近线方程，得结果.

详解：$\because e=\frac{c}{a}=\sqrt{3},\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1=3-1=2,\therefore\frac{b}{a}=\sqrt{2},$

因为渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，所以渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$，选 A.

点睛：已知双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$求渐近线方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$.

6. 在$\triangle ABC$中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则$AB=$

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$　　C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{5}$

【答案】A

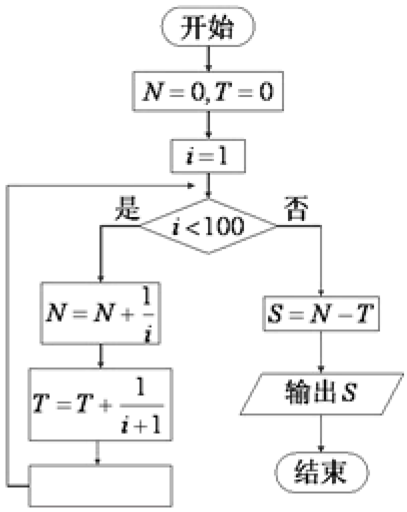
【解析】分析：先根据二倍角余弦公式求 cosC, 再根据余弦定理求 AB.

详解：因为$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times(\frac{\sqrt{5}}{5})^2-1=-\frac{3}{5},$

所以$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1+25-2\times1\times5\times(-\frac{3}{5})=32\therefore c=4\sqrt{2}$，选 A.

点睛：解三角形问题，多为边和角的求值问题，这就需要根据正、余弦定理结合已知条件灵活转化边和角之间的关系，从而达到解决问题的目的.

7. 为计算$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$，设计了下面的程序框图，则在空白框中应填入



A. $i=i+1$

B. $i=i+2$

C. $i=i+3$

D. $i=i+4$

【答案】B

【解析】分析：根据程序框图可知先对奇数项累加，偶数项累加，最后再相减.因此累加量为隔项.

详解：由$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$得程序框图先对奇数项累加，偶数项累加，最后再相减.因此在空白框中应填入$i=i+2$，选 B.

点睛：算法与流程图的考查，侧重于对流程图循环结构的考查.先明晰算法及流程图的相关概念，包括选择结构、循环结构、伪代码，其次要重视循环起点条件、循环次数、循环终止条件，更要通过循环规律，明确流程图研究的数学问题，是求和还是求项.

8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果.哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如$30=7+23$.在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是

A. $\frac{1}{12}$　B. $\frac{1}{14}$　C. $\frac{1}{15}$　D. $\frac{1}{18}$

【答案】C

【解析】分析：先确定不超过 30 的素数，再确定两个不同的数的和等于 30 的取法，最后根据古典概型概率公式求概率.

详解：不超过 30 的素数有 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，共 10 个，随机选取两个不同的数，共有$C_{10}^{2}=45$种方法，因为$7+23=11+19=13+17=30$，所以随机选取两个不同的数，其和等于 30 的有 3 种方法，故概率为$\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$，选 C.

点睛：古典概型中基本事件数的探求方法：（1）列举法.（2）树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求.对于基本事件有“有序”与“无序”区别的题目，常采用树状图法.（3）列表法：适用于多元素基本事件的求解问题，通过列表把复杂的题目简单化、抽象的题目具体化.（4）排列组合法：适用于限制条件较多且元素数目较多的题目.

9. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线AD_1与DB_1所成角的余弦值为

A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】分析：先建立空间直角坐标系，设立各点坐标，利用向量数量积求向量夹角，再根据向量夹角与线线角相等或互补关系求结果.

详解：以 D 为坐标原点，DA, DC, DD_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，则$D(0,0,0),A(1,0,0),B_1(1,1,\sqrt{3}),D_1(0,0,\sqrt{3})$,

所以$\vec{AD_1}=(-1,0,\sqrt{3}),\vec{DB_1}=(1,1,\sqrt{3})$,

因为$\cos<\vec{AD_1},\vec{DB_1}>=\frac{\vec{AD_1}\cdot\vec{DB_1}}{|\vec{AD_1}||\vec{DB_1}|}=\frac{-1+3}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以异面直线$AD_1$与$DB_1$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$，选 C.

点睛：利用法向量求解空间线面角的关键在于“四破”：第一，破“建系关”，构建恰当的空间直角坐标系；第二，破“求坐标关”，准确求解相关点的坐标；第三，破“求法向量关”，求出平面的法向量；第四，破“应用公式关”.

10. 若$f(x)=\cos x-\sin x$在$[-a,a]$是减函数，则的最大值是

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. $\frac{3\pi}{4}$　D. π

【答案】A

【解析】分析：先确定三角函数单调减区间，再根据集合包含关系确定的最大值

详解：因为$f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$,

所以由$0+2k\pi\le x+\frac{\pi}{4}\le\pi+2k\pi,(k\in Z)$得$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi,(k\in Z)$

因此$[-a,a]\subset[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]\ \therefore -a<a,-a\ge-\frac{\pi}{4},a\le\frac{3\pi}{4}\ \therefore 0<a\le\frac{\pi}{4}$，从而的最大值为$\frac{\pi}{4}$，选 A.

点睛：函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$的性质：

(1) $y_{max}=A+B$, $y_{min}=A-B$.　(2) 周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$.　(3) 由 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$求对称轴，　(4) 由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\varphi\le\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$求增区间；

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\varphi\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$求减区间.

11. 已知$f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数，满足$f(1-x)=f(1+x)$．若$f(1)=2$，则$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$

A. -50　B. 0　C. 2　D. 50

【答案】C

【解析】分析：先根据奇函数性质以及对称性确定函数周期，再根据周期以及对应函数值求结果.

详解：因为$f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数，且$f(1-x)=f(1+x)$,

所以$f(1+x)=-f(x-1)\therefore f(3+x)=-f(x+1)=f(x-1)\therefore T=4$,

因此$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)$,

因为$f(3)=-f(1), f(4)=-f(2)$，所以$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$,

$\because f(2)=f(-2)=-f(2)\therefore f(2)=0$，从而$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=f(1)=2$，选 C.

点睛：函数的奇偶性与周期性相结合的问题多考查求值问题，常利用奇偶性及周期性进行变换，将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内求解.

12. 已知F_1，F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左，右焦点，A是C的左顶点，点P在过A且斜率为$\frac{\sqrt{3}}{6}$的直线上，$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120°$，则C的离心率为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

【答案】D

【解析】分析：先根据条件得 $PF_2=2c$, 再利用正弦定理得 a, c 关系，即得离心率.

详解：因为$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120°$，所以 $PF_2=F_1F_2=2c$,

由AP斜率为$\frac{\sqrt{3}}{6}$得，$\tan\angle PAF_2=\frac{\sqrt{3}}{6},\therefore \sin\angle PAF_2=\frac{1}{\sqrt{13}}, \cos\angle PAF_2=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$,

由正弦定理得$\frac{PF_2}{AF_2}=\frac{\sin\angle PAF_2}{\sin\angle APF_2}$,

所以$\frac{2c}{a+c}=\frac{\frac{1}{\sqrt{13}}}{\sin(\frac{\pi}{3}-\angle PAF_2)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{13}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}}=\frac{2}{5}\therefore a=4c, e=\frac{1}{4}$，选 D.

点睛：解决椭圆和双曲线的离心率的求值及范围问题其关键就是确立一个关于a,b,c的方程或不等式，再根据a,b,c的关系消掉b得到a,c的关系式，而建立关于a,b,c的方程或不等式，要充分利用椭圆和双曲线的几何性质、点的坐标的范围等.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线$y=2\ln(x+1)$在点$(0,0)$处的切线方程为__________.

【答案】$y=2x$

【解析】分析：先求导数，再根据导数几何意义得切线斜率，最后根据点斜式求切线方程.

详解：$\because y'=\frac{2}{x+1}\therefore k=\frac{2}{0+1}=2\therefore y=2x$

点睛：求曲线的切线要注意“过点 P 的切线”与“在点 P 处的切线”的差异，过点 P 的切线中，点 P 不一

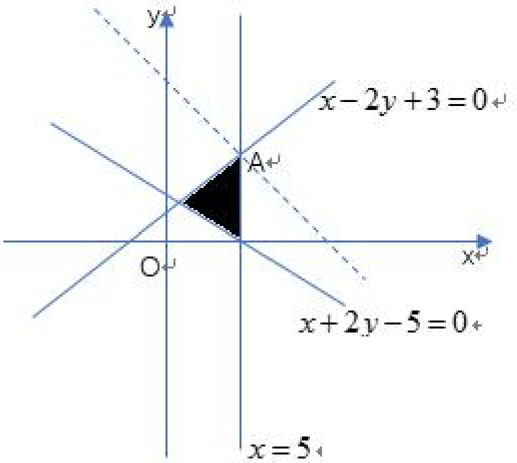
定是切点，点 P 也不一定在已知曲线上，而在点 P 处的切线，必以点 P 为切点.

14. 若x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y-5\ge 0,\\ x-2y+3\ge 0,\\ x-5\le 0,\end{cases}$ 则$z=x+y$的最大值为__________.

【答案】9

【解析】分析：先作可行域，再平移直线，确定目标函数最大值的取法.

详解：作可行域，则直线$z=x+y$过点 A(5, 4)时取最大值 9.



点睛：线性规划的实质是把代数问题几何化，即数形结合的思想.需要注意的是：一，准确无误地作出可行域；二，画目标函数所对应的直线时，要注意与约束条件中的直线的斜率进行比较，避免出错；三，一般情况下，目标函数的最大或最小值会在可行域的端点或边界上取得.

15. 已知$\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则$\sin(\alpha+\beta)=$__________.

【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】分析：先根据条件解出$\sin\alpha,\ \cos\beta$，再根据两角和正弦公式化简求结果.

详解：因为$\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，

所以$(1-\sin\alpha)^2+(-\cos\alpha)^2=1,\ \therefore\sin\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2}$,

因此$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\cos^2\alpha=\frac{1}{4}-1+\sin^2\alpha=\frac{1}{4}-1+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$.

点睛：三角函数求值的三种类型

(1)给角求值：关键是正确选用公式，以便把非特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数.

(2)给值求值：关键是找出已知式与待求式之间的联系及函数的差异.

①一般可以适当变换已知式，求得另外函数式的值，以备应用；

②变换待求式，便于将已知式求得的函数值代入，从而达到解题的目的.

(3)给值求角：实质是转化为“给值求值”，先求角的某一函数值，再求角的范围，确定角.

16. 已知圆锥的顶点为S，母线SA，SB所成角的余弦值为$\frac{7}{8}$，SA与圆锥底面所成角为45°，若△SAB的面积为$5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为__________．

【答案】$40\sqrt{2}\pi$

【解析】分析：先根据三角形面积公式求出母线长，再根据母线与底面所成角得底面半径，最后根据圆锥侧面积公式求结果.

详解：因为母线SA，SB所成角的余弦值为$\frac{7}{8}$，所以母线SA，SB所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{8}$，因为△SAB的面积为$5\sqrt{15}$，设母线长为l,所以$\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{\sqrt{15}}{8}=5\sqrt{15}\therefore l^2=80$，

因为SA与圆锥底面所成角为45°，所以底面半径为$l\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}l$,

因此圆锥的侧面积为$\pi rl=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi l^2=40\sqrt{2}\pi$.

点睛：本题考查线面角，圆锥的侧面积，三角形面积等知识点，考查学生空间想象与运算能力

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=-7$，$S_3=-15$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求S_n，并求S_n的最小值．

【答案】（1）$a_n=2n-9$，（2）$S_n=n^2-8n$，最小值为–16．

【解析】分析：（1）根据等差数列前n项和公式，求出公差，再代入等差数列通项公式得结果，（2）根据等差数列前n项和公式得S_n的二次函数关系式，根据二次函数对称轴以及自变量为正整数求函数最值.

详解：（1）设$\{a_n\}$的公差为d，由题意得$3a_1+3d=-15$．

由$a_1=-7$得$d=2$．

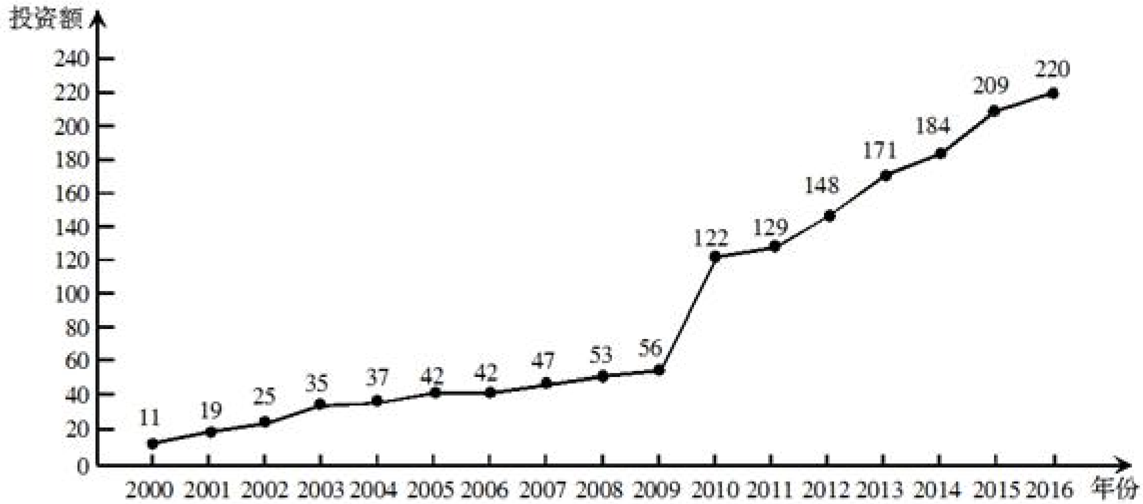
所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-9$．

（2）由（1）得$S_n=n^2-8n=(n-4)^2-16$．

所以当$n=4$时，S_n取得最小值，最小值为–16．

点睛：数列是特殊的函数，研究数列最值问题，可利用函数性质，但要注意其定义域为正整数集这一限制条件.

18. 下图是某地区2000年至2016年环境基础设施投资额y（单位：亿元）的折线图．



为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了y与时间变量的两个线性回归模型．根据 2000 年至 2016 年的数据（时间变量的值依次为$1, 2, \cdots, 17$）建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据（时间变量的值依次为$1, 2, \cdots, 7$）建立模型②：$\hat{y}=99+17.5t$．

（1）分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值；

（2）你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？并说明理由．

【答案】（1）利用模型①预测值为 226.1，利用模型②预测值为 256.5，（2）利用模型②得到的预测值更可靠.

【解析】分析：（1）两个回归直线方程中无参数，所以分别求自变量为 2018 时所对应的函数值，就得结果，（2）根据折线图知 2000 到 2009，与 2010 到 2016 是两个有明显区别的直线，且 2010 到 2016 的增幅明显高于 2000 到 2009，也高于模型 1 的增幅，因此所以用模型 2 更能较好得到 2018 的预测.

详解：（1）利用模型①，该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为

$\hat{y}=-30.4+13.5\times19=226.1$（亿元）.

利用模型②，该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为

$\hat{y}=99+17.5\times9=256.5$（亿元）.

（2）利用模型②得到的预测值更可靠.

理由如下：

（i）从折线图可以看出，2000 年至 2016 年的数据对应的点没有随机散布在直线 $y=-30.4+13.5t$ 上下，这说明利用 2000 年至 2016 年的数据建立的线性模型①不能很好地描述环境基础设施投资额的变化趋势．2010 年相对 2009 年的环境基础设施投资额有明显增加，2010 年至 2016 年的数据对应的点位于一条直线的附近，这说明从 2010 年开始环境基础设施投资额的变化规律呈线性增长趋势，利用 2010 年至 2016 年的数据建立的线性模型$\hat{y}=99+17.5t$ 可以较好地描述 2010 年以后的环境基础设施投资额的变化趋势，因此利用模型②得

到的预测值更可靠.

（ii）从计算结果看，相对于 2016 年的环境基础设施投资额 220 亿元，由模型①得到的预测值 226.1 亿元的增幅明显偏低，而利用模型②得到的预测值的增幅比较合理，说明利用模型②得到的预测值更可靠.

以上给出了 2 种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.

点睛：若已知回归直线方程，则可以直接将数值代入求得特定要求下的预测值；若回归直线方程有待定参数，则根据回归直线方程恒过点$(\bar{x},\bar{y})$求参数.

19. 设抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，过F且斜率为$k(k>0)$的直线与C交于A，B两点，$|AB|=8$.

（1）求的方程；

（2）求过点A，B且与C的准线相切的圆的方程.

【答案】(1) $y=x-1$,(2)$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

【解析】分析：(1)根据抛物线定义得$|AB|=x_1+x_2+p$，再联立直线方程与抛物线方程，利用韦达定理代入求出斜率，即得直线的方程；（2）先求 AB 中垂线方程，即得圆心坐标关系，再根据圆心到准线距离等于半径得等量关系，解方程组可得圆心坐标以及半径，最后写出圆的标准方程.

详解：（1）由题意得 F（1，0），l 的方程为 $y=k$（$x-1$）（$k>0$）.

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.

由$\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\Delta=16k^2+16=0$，故$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\frac{4k^2+4}{k^2}$.

由题设知$\frac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得 $k=-1$（舍去），$k=1$.

因此 l 的方程为 $y=x-1$.

（2）由（1）得 AB 的中点坐标为（3，2），所以 AB 的垂直平分线方程为

$y-2=-(x-3)$，即$y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为（x_0，y_0），则

$\begin{cases} y_0=-x_0+5, \\ (^{x_0}=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x_0=3, \\ y_0=2 \end{cases}$ 或$\begin{cases} x_0=11, \\ y_0=-6. \end{cases}$

因此所求圆的方程为

$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

点睛：确定圆的方程方法

(1)直接法：根据圆的几何性质，直接求出圆心坐标和半径，进而写出方程.

(2)待定系数法

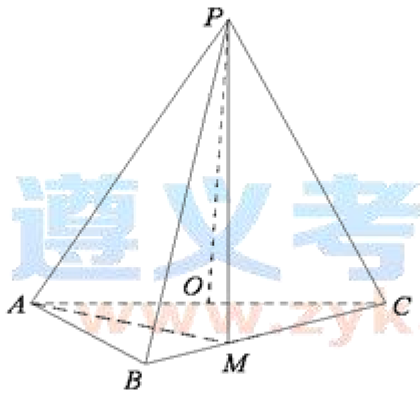
①若已知条件与圆心(a,b)和半径有关，则设圆的标准方程依据已知条件列出关于a,b,r的方程组，从而求出a,b,r的值；

②若已知条件没有明确给出圆心或半径，则选择圆的一般方程，依据已知条件列出关于D、E、F的方程组，进而求出D、E、F的值.

20. 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O为AC的中点.

（1）证明：$PO\perp$平面ABC；

（2）若点M在棱BC上，且二面角$M-PA-C$为$30°$，求PC与平面PAM所成角的正弦值.



【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】分析：(1)根据等腰三角形性质得 PO 垂直 AC，再通过计算，根据勾股定理得 PO 垂直 OB，最后根据线面垂直判定定理得结论，(2)根据条件建立空间直角坐标系，设立各点坐标，根据方程组解出平面 PAM 一个法向量，利用向量数量积求出两个法向量夹角，根据二面角与法向量夹角相等或互补关系列方程，解得 M 坐标，再利用向量数量积求得向量 PC 与平面 PAM 法向量夹角，最后根据线面角与向量夹角互余得结果.

详解：(1) 因为$AP=CP=AC=4$，O为AC的中点，所以$OP\perp AC$，且$OP=2\sqrt{3}$.

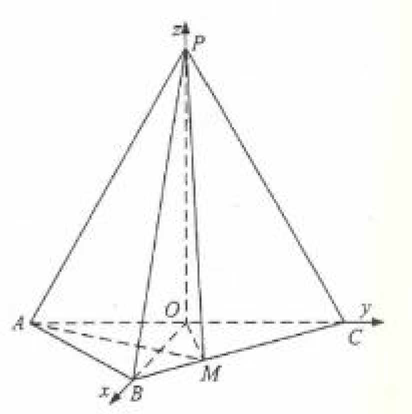
连结OB.因为$AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形，

且$OB\perp AC$，$OB=\frac{1}{2}AC=2$.

由$OP^2+OB^2=PB^2$知$PO\perp OB$.

由$OP\perp OB, OP\perp AC$知$PO\perp$平面ABC.

(2) 如图，以O为坐标原点，$\vec{OB}$的方向为x轴正方向，建立空间直角坐标系$O-xyz$.



由已知得$O(0,0,0),B(2,0,0),A(0,-2,0),C(0,2,0),P(0,0,2\sqrt{3}),\vec{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$,取平面PAC的法向量$\vec{OB}=(2,0,0)$.

设$M(a,2-a,0)(0<a\le 2)$，则$\vec{AM}=(a,4-a,0)$.

设平面PAM的法向量为$n=(x,y,z)$.

由$\vec{AP}\cdot n=0,\vec{AM}\cdot n=0$得$\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0\\ ax+(4-a)y=0\end{cases}$，可取$n=(\sqrt{3}(a-4),\sqrt{3}a,-a)$，

所以$\cos\langle\vec{OB},n\rangle=\dfrac{2\sqrt{3}(a-4)}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}$.由已知得$|\cos\langle\vec{OB},n\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$\dfrac{2\sqrt{3}|a-4|}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.解得$a=-4$（舍去），$a=\dfrac{4}{3}$.

所以$n=(-\dfrac{8\sqrt{3}}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3},-\dfrac{4}{3})$.又$\vec{PC}=(0,2,-2\sqrt{3})$，所以$\cos\langle\vec{PC},n\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以PC与平面PAM所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

点睛：利用法向量求解空间线面角的关键在于“四破”：第一，破“建系关”，构建恰当的空间直角坐标系；第二，破“求坐标关”，准确求解相关点的坐标；第三，破“求法向量关”，求出平面的法向量；第四，破“应用公式关”.

21. 已知函数$f(x)=e^x-ax^2$.

（1）若$a=1$，证明：当$x\ge 0$时，$f(x)\ge 1$；

（2）若$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点，求.

【答案】（1）见解析（2）$\dfrac{e^2}{4}$

【解析】分析：(1)先构造函数$g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，再求导函数，根据导函数不大于零得函数单调递减，最后根据单调性证得不等式，(2)研究f(x)零点，等价研究$h(x)=1-ax^2e^{-x}$的零点，先求h(x)导数：$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$，这里产生两个讨论点，一个是 a 与零，一个是 x 与 2，当$a\le 0$时，$h(x)>0$，h(x)没有零点；当$a>0$时，h(x)先减后增，从而确定只有一个零点的必要条件，再利用零点存在定理确定条件的充分性，即得 a 的值.

详解：（1）当$a=1$时，$f(x)\ge 1$等价于$(x^2+1)e^{-x}-1\le 0$.

设函数$g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则$g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

当$x\ne 1$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

而$g(0)=0$，故当$x\ge 0$时，$g(x)\le 0$，即$f(x)\ge 1$.

（2）设函数$h(x)=1-ax^2e^{-x}$.

$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点当且仅当$h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点.

（i）当$a\le 0$时，$h(x)>0$，$h(x)$没有零点；

（ii）当$a>0$时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$.

当$x\in(0,2)$时，$h'(x)<0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$.

所以$h(x)$在$(0,2)$单调递减，在$(2,+\infty)$单调递增.

故$h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$是$h(x)$在$[0,+\infty)$的最小值.

①若$h(2)>0$，即$a<\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0,+\infty)$没有零点；

②若$h(2)=0$，即$a=\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点；

③若$h(2)<0$，即$a>\frac{e^2}{4}$，由于$h(0)=1$，所以$h(x)$在$(0,2)$有一个零点，

由（1）知，当$x>0$时，$e^x>x^2$，所以$h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0$.

故$h(x)$在$(2,4a)$有一个零点，因此$h(x)$在$(0,+\infty)$有两个零点.

综上，$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$.

点睛：利用函数零点的情况求参数值或取值范围的方法

(1)利用零点存在的判定定理构建不等式求解.

(2)分离参数后转化为函数的值域(最值)问题求解.

(3)转化为两熟悉的函数图象的上、下关系问题，从而构建不等式求解.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$（为参数），直线的参数方程为$\begin{cases} x = 1 + t\cos\alpha, \\ y = 2 + t\sin\alpha \end{cases}$（为参数）.

（1）求C和的直角坐标方程；

（2）若曲线C截直线所得线段的中点坐标为$(1, 2)$，求的斜率.

【答案】(1）当$\cos\alpha \neq 0$时，的直角坐标方程为$y = \tan\alpha \cdot x + 2 - \tan\alpha$，当$\cos\alpha = 0$时，的直角坐标方程为$x = 1$.（2）$-2$

【解析】分析：(1)根据同角三角函数关系将曲线C的参数方程化为直角坐标方程，根据代入消元法将直线的参数方程化为直角坐标方程，此时要注意分$\cos\alpha \neq 0$ 与$\cos\alpha = 0$两种情况.(2)将直线参数方程代入曲线C的直角坐标方程，根据参数几何意义得$\sin\alpha,\cos\alpha$之间关系，求得$\tan\alpha$，即得的斜率.

详解：(1）曲线C的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

当$\cos\alpha \neq 0$时，的直角坐标方程为$y = \tan\alpha \cdot x + 2 - \tan\alpha$，

当$\cos\alpha = 0$时，的直角坐标方程为$x = 1$.

（2）将的参数方程代入C的直角坐标方程，整理得关于的方程

$(1 + 3\cos^2\alpha)t^2 + 4(2\cos\alpha + \sin\alpha)t - 8 = 0$. ①

因为曲线C截直线所得线段的中点$(1,2)$在C内，所以①有两个解，设为t_1，t_2，则$t_1 + t_2 = 0$.

又由①得$t_1 + t_2 = -\frac{4(2\cos\alpha + \sin\alpha)}{1 + 3\cos^2\alpha}$，故$2\cos\alpha + \sin\alpha = 0$，于是直线的斜率$k = \tan\alpha = -2$.

点睛：直线的参数方程的标准形式的应用

过点 $M_0(x_0, y_0)$，倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程是$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$.($t$ 是参数，t 可正、可负、可为 0)

若 M_1，M_2是 l 上的两点，其对应参数分别为 t_1，t_2，则

(1)M_1，M_2两点的坐标分别是$(x_0+t_1\cos\alpha, y_0+t_1\sin\alpha)$，$(x_0+t_2\cos\alpha, y_0+t_2\sin\alpha)$.

(2)$|M_1M_2|=|t_1-t_2|$.

(3)若线段 M_1M_2的中点 M所对应的参数为 t，则 $t=\frac{t_1+t_2}{2}$，中点 M到定点 M_0的距离$|MM_0|=|t|=\left|\frac{t_1+t_2}{2}\right|$.

(4)若 M_0为线段 M_1M_2的中点，则 $t_1+t_2=0$.

23. [选修 4－5：不等式选讲]

设函数$f(x) = 5 - |x + a| - |x-2|$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geq 0$的解集；

（2）若$f(x)\leq 1$，求的取值范围．

【答案】（1）$\{x|-2\leq x\leq 3\}$,(2)$(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$

【解析】分析：（1）先根据绝对值几何意义将不等式化为三个不等式组，分别求解，最后求并集，（2）先化简不等式为$|x+a|+|x-2|\geq 4$，再根据绝对值三角不等式得$|x+a|+|x-2|$最小值，最后解不等式$|a+2|\geq 4$得的取值范围．

详解：（1）当$a=1$时，

$$f(x)=\begin{cases}2x+4,x\leq -1,\\ 2,-1<x\leq 2,\\ -2x+6,x>2.\end{cases}$$

可得$f(x)\geq 0$的解集为$\{x|-2\leq x\leq 3\}$．

（2）$f(x)\leq 1$等价于$|x+a|+|x-2|\geq 4$．

而$|x+a|+|x-2|\geq|a+2|$，且当$x=2$时等号成立．故$f(x)\leq 1$等价于$|a+2|\geq 4$．

由$|a+2|\geq 4$可得$a\leq -6$或$a\geq 2$，所以的取值范围是$(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$．

点睛：含绝对值不等式的解法有两个基本方法，一是运用零点分区间讨论，二是利用绝对值的几何意义求解．法一是运用分类讨论思想，法二是运用数形结合思想，将绝对值不等式与函数以及不等式恒成立交汇、渗透，解题时强化函数、数形结合与转化化归思想方法的灵活应用，这是命题的新动向．